Tema 1 - Propiedades básicas de los números complejos.

Ejercicio 1. Dado $\omega \in \mathbb{C}$ con $|\omega| = 1$, probar que

$$\exists l = \lim_{n\to\infty} \omega^n \Longleftrightarrow l = 1 \text{ y } \omega = 1.$$

Ejercicio 2. Para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ tenemos el grupo de raíces n-ésimas de la unidad $\mathbb{T}_n = \{\omega \in \mathbb{C} : \omega^n = 1\}$. Probar que

$$\sum_{\omega\in\mathbb{T}_n} \omega = 0, \qquad \prod_{\omega\in\mathbb{T}_n} \omega = (-1)^{n-1}, \qquad \prod_{\omega\in\mathbb{T}_n-\{1\}} (1-\omega) = n;$$

y que para $m \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{Z}$ se tiene

$$\frac{1}{m}\sum_{\omega\in\mathbb{T}_m} \omega^n = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 0 \bmod m \\ 0 \text{ si } n \neq 0 \bmod m. \end{cases}$$

Ejercicio 3 (Teorema de Kronecker). Sea $\omega \in S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$. Probar que el conjunto

$$\omega^{\mathbb{N}} = \{\omega^n : n \in \mathbb{Z}^+\}$$

es denso en la S^1 si y solo si ω no es una raíz de la unidad.

Ejercicio 4. Sea $z \in \mathbb{C}^*$. Encontrar todos los $w \in \mathbb{C}$ tales que $e^w = z$.

Ejercicio 5. Sea $z \in \mathbb{C}^*$ y w_0 el único complejo con parte imaginaria en $(-\pi, \pi]$ tal que $e^{w_0} = z$. Diremos que w_0 es el *logaritmo principal* o *valor principal del logaritmo* de z y lo denotaremos

$$\mathrm{Log}(z) := w_0.$$

Determinar el menor $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\mathrm{Log}(1+i)^n \neq n \cdot \mathrm{Log}(1+i)$.

Ejercicio 6. Sea $\omega \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{Z}$. Calcular *valor principal* de $\sqrt[n]{\omega}$. En particular, calcular $\sqrt[3]{(-1)^3}$, $\sqrt[3]{i^3}$, $\sqrt[5]{i^5}$ y $\sqrt{(3i-4)^2}$.

Ejercicio 7. Sea f una función de clase $\mathcal{C}^1$ en un abierto conexo $G \subseteq \mathbb{C}$. Diremos que f tiene *antiderivada holomorfa en* G si existe una función derivable compleja φ de modo que $f = \varphi'$. Probar que si existe alguna curva *cerrada* C^1 a trozos $\gamma \subseteq G$

Ejercicio 8. Sea f una función de clase $\mathcal{C}^1$ en un abierto conexo G como antes. Probar que si existe un abierto conexo $U \subseteq G$ de cierre compacto tal que

$$\int_{\partial U} f(z)dz \neq 0,$$

entonces f no es derivable compleja en G.

Ejercicio 9. Denotemos $z = x + iy \equiv \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z)$ y sea $n \in \mathbb{N}$. Computar

$$\int_{\gamma_1} xdx, \qquad \int_{\gamma_2} ydz, \qquad \int_{\gamma_3} z^n dz, \qquad \int_{\gamma_3} \overline{z}^n dz;$$

donde

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \text{ polígono } [-i, -i+1, i+1, -i], \\ \gamma_2 &= \text{ semicircunferencia unidad (superior)}, \\ \gamma_3 &= S^1. \end{aligned}$$

Ejercicio 10. Considérese la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

para $s \in \mathbb{C}$. Demostrar que converge normalmente (en particular, uniformemente) para $\mathrm{Re}(s) > 1$. Tenemos entonces una función continua en $\{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > 1\}$ definida como

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

y que se llama *función zeta de Riemann*[1].